



## University of the Pacific Scholarly Commons

---

Euler Archive - All Works

Euler Archive

---

1750

# Sur le frottement des corps solides

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

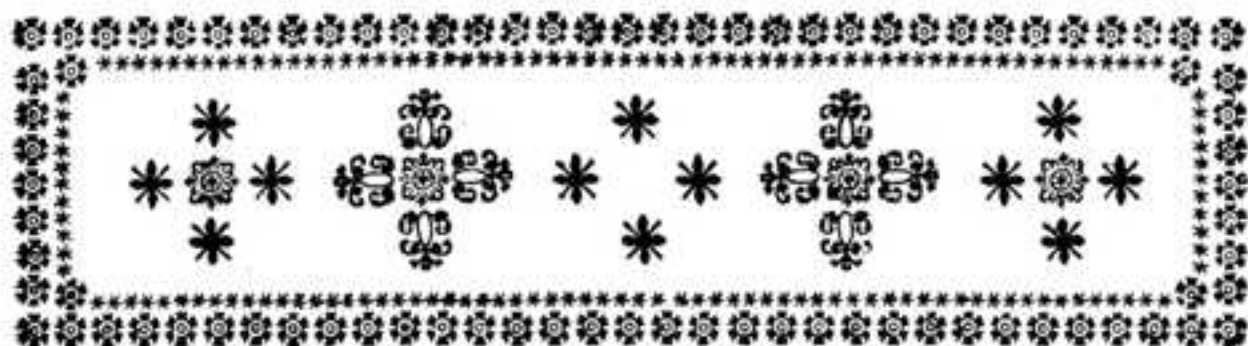
2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Sur le frottement des corps solides" (1750). *Euler Archive - All Works*. 143.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/143>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).



# SUR LE FROTTEMENT

DES CORPS SOLIDES,

PAR M. EULER.



I.

N a remarqué, que dans la plupart des machines le frottement est si considerable, qu'une bonne partie des forces, qui sont requises pour mettre la machine en mouvement, n'est employée qu'à surmonter cette résistance: de sorte que s'il étoit possible de délivrer les machines du frottement, une beaucoup plus petite quantité de forces seroit suffisante à produire le même effet. Tous les Méceniciens conviennent aussi, qu'un des principaux articles, desquels dépend la dernière perfection des machines, consiste dans la diminution du frottement, & c'est dans cette vue, qu'ils ont taché depuis longtems de rechercher la nature & la quantité du frottement, pour en découvrir les moyens de le diminuer, ou de le faire évanouir tout à fait, s'il étoit possible.

II. Le frottement se manifeste toutes les fois, qu'un corps doit glisser sur la surface d'un autre corps; car quelque polies, que soient les surfaces des corps qui glissent les uns sur les autres, le mouvement y rencontre toujours quelque résistance, qui le détruit bientôt entièrement, à moins qu'il ne soit renouvelé par l'action réitérée de nouvelles

velles forces. Cependant il n'y a aucun doute, que le frottement ne devienne d'autant plus petit, plus les surfaces des corps, qui glissent les uns sur les autres, seront polies & unies, afin qu'il ne se trouve plus de petites inégalités, qui puissent arrêter le mouvement. C'est par cette raison, que les traîneaux glissent assez aisément sur la glace; & que dans les machines on éprouve une diminution considérable du frottement, en enduisant de la graisse les surfaces, qui se frottent mutuellement; puisque la graisse sert à rendre ces surfaces plus égales & plus unies.

III. Cependant les matieres, dont on se sert dans la construction des Machines, comme les bois, & les métaux, ne sont pas susceptibles d'un tel degré de polissure, que le frottement ne soit pas encore très considérable: & l'expérience a fait voir, que la résistance, dont toutes ces matieres s'opposent au mouvement, est presque la même, & égale à une partie fort considérable de leur poids entier. Mr. *Amon* soutint, que le frottement étoit toujours égal au tiers du poids d'un corps, qui se mouvoit sur une surface horizontale, ou généralement au tiers de la force, dont le corps étoit pressé contre la surface, sur laquelle il glissoit. D'autres ont trouvé la quantité du frottement un peu différente, & Mr. *Bisfinger* ne donne au frottement que la quatrième partie de la pression. Comme cela dépend du degré de polissure, qu'ont les surfaces des corps, il n'est pas surprenant, que les expériences ne donnent pas toujours la même quantité de frottement.

IV. Mais une circonstance bien remarquable, dont tous ceux qui ont examiné le frottement par les expériences, sont d'accord; c'est que la quantité du frottement dépend uniquement du poids, ou de la force, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il est entraîné; & que ni la figure du corps, ni la grandeur de sa base, n'entrent en aucune maniere dans la détermination du frottement. Car si le frottement étoit causé par l'arrachement des petits filets, ou par l'enfoncement des petites prominences, qui se trouvent sur les surfaces, qui glissent l'une sur l'autre, on devroit penser, que plus les surfaces, qui se touchent seroient larges, le frottement en devroit devenir plus

grand. Peut-être même, que cette circonstance contribuë quelque chose, en des matieres fileuses, & d'autres d'une semblable nature; mais dans les bois & metaux, dont on a fait principalement les experiences, on doit convenir que la largeur de la base ne sert, ni à augmenter, ni à diminuer le frottement.

Fig. 1.

V. Donc si un corps ABCD est pressé contre la surface MN par une force quelconque GP, qui soit  $\equiv P$ , soit que ce soit le poids du corps ABCD, si la surface MN est horizontale, ou qu'il y ait encore une autre force, dont le corps soit poussé à la surface; dans ce cas il faut une certaine force EF, avant qu'on soit en état de remuer ce corps, & de le tirer suivant la direction BN. On sait, que s'il n'y avoit point de frottement, la moindre force EF seroit capable de mettre ce corps en mouvement. Mais si le frottement est égal à un tiers de la force P, ou que nous le posions  $\equiv \frac{m}{n} P$ , pour ne nous pas borner à une hypothese, qui pourroit être trop particuliere; alors tant que la force EF sera plus petite que  $\frac{m}{n} P$ , le corps demeurera en repos, de même que s'il n'étoit sollicité d'aucune force. Or dès qu'on emploiera une force EF plus grande que  $\frac{m}{n} P$ , le corps sera actuellement entraîné selon la direction BN; mais le mouvement ne sera produit, que par l'excès de la force EF sur le frottement  $\frac{m}{n} P$ .

VI. Le frottement doit donc être regardé, comme une force  $\equiv \frac{m}{n} P$ , dont le corps est tiré en arriere selon la direction AM, qui est toujours contraire à celle du mouvement du corps, & passe par l'attouchement AB. Or elle est bien differente des autres forces réelles, qui peuvent agir sur le corps; car elle ne produit aucun effet, que lorsque le corps se trouve actuellement en mouvement, & ce n'est qu'alors, qu'elle fait le même effet, que si le corps ABCD étoit effectivement

diversément sollicité en arriere selon la direction  $AM$ . Tant que le corps est en repos, & qu'il n'est tiré que par des forces moindres que le frottement, tout son effet ne consiste qu'en détruisant celui que ces forces devroient produire elles mêmes. Ainsi nommant la force  $EF = F$ , le corps n'en recevra aucun mouvement, à moins que  $F$

ne surpasse la valeur du frottement  $\frac{m}{n} P$ ; mais dès que  $F > \frac{m}{n} P$  le

corps recevra une acceleration, qui convient à l'excès  $F - \frac{m}{n} P$ ;

& il ne s'ensuit pas, que si  $F < \frac{m}{n} P$ , l'acceleration devienne negative.

VII. Cela paroitra d'abord fort étrange, & contraire à la loi de continuité, de sorte que la nature semble faire ici un saut, ce qui n'arrive jamais dans l'action des autres forces. Cependant on peut se représenter l'action du frottement, d'une maniere, qui levera tous les doutes, & qui sera conforme à l'action des autres forces: car je ferai voir, qu'on pourra produire par la seule action de la gravité un effet tout à fait semblable à celui du frottement, par lequel on pourroit même découvrir la nature du frottement, quand même elle ne seroit pas encore connue par l'experience. Cette consideration servira aussi à faire voir, en quoi consiste la veritable cause du frottement, & d'où vient cette résistance, qu'il oppose au mouvement. Car quoique peut-être la veritable cause du frottement ne convienne pas précisément avec celle que je vai représenter, la parfaite ressemblance qu'on y remarquera, ne laissera aucun doute sur la possibilité des effets, qui paroissent si étranges.

VIII. Sur la ligne horizontale  $MN$  soient  $aG$ ,  $bG$ , deux plans également inclinés, qui forment en  $G$  l'angle  $aGb$ , dans lequel soit enfoncé le corps  $ABCD$  avec sa base pointuë  $AGB$ , dont l'angle  $AGB$  soit précisément égal à  $aGb$ . Dans cette situation le corps  $ABCD$  sera non seulement en équilibre, mais aussi une petite force  $EF$ , qui lui est appliquée horizontalement ne sera pas capable de le



mettre en mouvement, quoique les faces, dont ce corps touche les plans inclinés soient parfaitement polies, & qu'aucun frottement n'y ait lieu. Car pour que la force  $QF$  puisse mouvoir le corps  $ABCD$ , il faut qu'elle le fasse monter sur le plan incliné  $Gb$ , & partant elle doit être plus grande que la partie du poids du corps, laquelle le sollicite dans la direction contraire  $GQ$ . Ainsi ce corps  $ABCD$  se trouve dans un état fort semblable à celui du frottement, puisque la force  $EF$  n'est pas capable de le mouvoir, tandis qu'elle est moindre que le degré requis pour vaincre la pente du plan incliné.

IX. La ressemblance paroitra encore davantage, si nous déterminons la quantité de la force  $EF$ , qui est requise pour mettre le corps en mouvement. Soit pour cet effet l'angle  $MGa = NGb = \alpha$ , le poids du corps  $ABCD = P$ , dont il est sollicité en bas selon la direction verticale  $GP$ ; & la force  $EF = F$ , qui tire le corps suivant la direction horizontale  $EF$ . Puisque le corps ne peut être mis en mouvement, que selon la direction  $Gb$ , je décompose la force  $EF = F$  suivant la direction  $EH$  parallèle à  $Gb$ , &  $FH$  qui y est normale: l'angle  $FEH$  étant  $= NGb = \alpha$ , la force  $EH$  sera  $= F \cos \alpha$ , & ce n'est que celle-cy qui est employée à mettre le corps en mouvement. Or dès que le mouvement va commencer, le poids du corps, ou la force  $GP = P$  s'y oppose par sa partie  $GQ$ , qui résulte de la résolution suivant les directions  $GQ$  &  $PQ$ , dont celle-cy est perpendiculaire à  $GQ$ . Donc l'angle  $GPQ$  étant  $= \alpha$ , la force  $GQ$  sera  $= P \sin \alpha$ : d'où l'on voit que le corps ne pourra être mis en mouvement, que la force  $F \cos \alpha$  ne soit pas plus grande que  $P \sin \alpha$ .

X. Donc tant qu'il sera  $F \cos \alpha < P \sin \alpha$ , le corps  $ABCD$  restera en repos, & ne recevra aucun mouvement de l'action de la force  $EF = F$ . Or si  $F \cos \alpha = P \sin \alpha$  ou  $F = P \tan \alpha$ , le corps fera, pour ainsi dire, en équilibre, ou tout prêt à se mouvoir, dès que la force  $F$  devient tant soit peu plus grande que  $P \tan \alpha$ : & quand cela arrive que  $F > P \tan \alpha$ , l'accélération du corps suivant la direction  $Gb$  sera produite par l'excès de la force  $EH = F \cos \alpha$  sur  $P \sin \alpha$ , c'est à dire par  $F \cos \alpha - P \sin \alpha$ . Par conséquent la résistance,

ce, qu'il faut vaincre dans ce cas, avant que le corps puisse être remué, sera  $\equiv P \sin \alpha$ , laquelle étant égale à une partie du poids du corps, & ne dépendant nullement de la largeur de la base  $AGB$ , dont ce corps touche la surface  $aGb$ , il en paroît une assez parfaite ressemblance entre ce cas, & celui du frottement; & pour rendre ces cas égaux, on n'a qu'à faire  $\sin \alpha \equiv \frac{1}{3}$ , dans l'hypothèse d'*Amontons* ou les angles  $MGa$ , &  $NGb \equiv 19^\circ, 29'$ : or dans l'hypothèse de *Mr. Bilfinger* ces angles seront  $\equiv 14^\circ, 28'$ , à cause de  $\sin \alpha \equiv \frac{1}{3}$ .

XI. Il en sera de même, si la base  $AB$  du corps  $ABCD$  est formée de plusieurs angles obtus  $AcdcdcdB$ , tous semblables à celui  $AGB$ , que nous venons de considérer, & que la surface  $MN$  soit taillée d'une manière semblable, en sorte que les inégalités de la base & de la surface soient parfaitement d'accord. Car dans ce cas, si chacun des angles, que constituent les plans inclinés  $cd$  avec la ligne horizontale  $MN$ , est  $\equiv \alpha$ , le corps  $ABCD$ , dont le poids est  $\equiv P$ , ne sera remué par la force horizontale  $EF \equiv F$ , qu'il n'y soit  $F \cos \alpha > P \sin \alpha$ , ou  $F > P \tan \alpha$ : & tant que la force  $F$  sera moindre que  $P \tan \alpha$ , le corps restera en repos. On voit bien, que la même chose arrivera, quelque grand que soit le nombre des prominences  $d, d$ , &c. & il n'est pas même nécessaire, que toutes les inclinaisons soient égales entr'elles, pourvu qu'il ne s'y trouve de plus grandes que l'angle  $\alpha$ ; car quand même il y auroit quelques angles moindres, ceux-cy ne faciliteroient point le mouvement.

XII. Si c'étoit le cas du frottement, comme il paroît fort probable, on comprendroit aisément les phénomènes du frottement, que j'ai rapportés cy dessus, & qui regardent la difficulté de mettre un corps en mouvement. Car cette difficulté ne consisteroit qu'en ce que, pour mouvoir le corps, il faudroit qu'il montât effectivement sur un plan incliné. De là on voit que dès que le corps a commencé de se mouvoir, comme ces plans inclinés  $dc, dc$  &c. sont extrêmement petits, ce corps montera & descendra alternativement; & partant puisque les descentes se font d'elles mêmes, pendant que le corps se meut, la difficulté du frottement ne se fait sentir que par intervalles, c'est à dire, dans les momens où le corps est obligé de monter. D'où il paroît

Fig. 3.

paroit, qu'on peut tirer cette conséquence; que pendant que le corps est actuellement en mouvement, l'effet du frottement ne sera que la moitié de celui qu'on éprouve, avant qu'on puisse mettre en mouvement le corps.

XIII. Donc afin que la force  $EF = F$  puisse imprimer au corps ABCD un mouvement, elle doit être plus grande que  $P \tan \alpha$ , mais dès que le corps se meut, la résistance du frottement sera diminuée à demi. Par conséquent pour calculer l'accélération du corps, on ne doit diminuer la force sollicitante, que de  $\frac{1}{2} P \sin \alpha$ , de sorte que l'accélération sera proportionnelle à  $F \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha$ , ou peut-être à  $F - \frac{1}{2} P \tan \alpha$ , puisque dans les descentes alternatives, l'accélération est augmentée par la gravité. Ceux qui ont examiné le frottement par les expériences, se sont bornés uniquement à en découvrir la quantité avant que les corps fussent mis en mouvement. Il seroit donc fort à souhaiter, qu'on fit aussi des expériences, d'où l'on puisse conclure la quantité du frottement pendant que les corps sont en mouvement: & je ne doute presque pas, qu'on ne la trouveroit considérablement moindre: puisqu'on sait, que pour mettre en mouvement une machine, il faut que les premiers efforts soient plus grands, que ceux qu'on emploie dans la suite pour continuer le mouvement.

Fig. 4.

XIV. On se sert ordinairement du plan incliné pour connoître la quantité du frottement. Ayant mis le corps P sur le plan AB, on élève successivement ce plan depuis sa situation horizontale AC, jusqu'à ce que le corps P vient sur le point de descendre: alors on mesure l'angle B de l'inclinaison du plan AB, ou les cotés du triangle rectangle ABC, d'où l'on tirera la valeur de la partie de la pesanteur qui agit selon la direction AB, qui sera  $= P \sin B = \frac{AC}{AB} P$ , & ce sera à cette force que le frottement du corps P sur le plan AB est égal. Or comme le frottement est proportionnel à la pression, dont le corps P est apprimé au plan, cette pression étant  $= P \cos B = \frac{BC}{AC} P$ : on apprendra par cette expérience que le frottement est à la pression, comme  
sin



sin B à cos B, ou comme AC à BC : cette raison du frottement à la pression fera donc comme la tangente de l'angle B au sinus total. Ce sera donc la force du frottement, qu'on doit vaincre, avant que le corps P puisse être mis en mouvement.

XV. Mais pour connoître si le frottement, que le corps éprouve pendant qu'il se meut actuellement, est le même ou non : on pourra déterminer la quantité du frottement pour le cas du mouvement, par le moyen du même plan incliné. On n'aura qu'à élever le plan AB un peu plus que dans le cas précédent, afin que le corps glisse actuellement sur ce plan en bas. Soit l'angle de l'inclinaison  $B = \alpha$  ; & la pression du corps P sur le plan sera  $= P \cos \alpha$ , & la force dont il est sollicité suivant la direction AB sera  $= P \sin \alpha$ . Supposons que dans le mouvement le frottement soit à la pression comme  $\mu$  à 1, & le frottement pour le cas que nous considérons sera  $= \mu P \cos \alpha$  ; qui étant retranché de la force acceleratrice  $P \sin \alpha$ , le corps sera encore tiré selon la direction de son mouvement par la force  $= P \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = P (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .

XVI. Que le corps P ait commencé son mouvement depuis le repos en P, & qu'il soit parvenu après un tems  $= t$  en M. Soit l'espace parcouru  $AM = s$ , & la vitesse en M égale à celle, qu'un corps acquiert par la chute de la hauteur  $= v$ , & les principes de Mécanique nous fournissent cette équation  $P dv = P (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) ds$  ou en prenant l'intégrale  $v = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) s$ , de là l'element

du tems sera  $dt = \frac{ds}{V v} = \frac{ds}{V (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) s}$ , dont l'in-

tegrale est  $t = \frac{2 \sqrt{s}}{V (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$ . Cette expression, si l'on ex-

prime l'espace parcouru  $s$  en milliemes parties du pieds de Rhin, donnera le tems  $t$  exprimé en minutes secondes, lorsqu'on divise cette expression par 250 ; de sorte que si le tems  $t$  est exprimé en secondes, & l'espace  $s$  en milliemes parties du pied de Rhin, on aura cette équation

$$t = \frac{\sqrt{s}}{125 V (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

XVII. Supposons maintenant qu'on ait mesuré exactement le tems, que le corps P amis à descendre sur le plan incliné AB, dont l'angle de l'elevation sur l'horizon, ou l'angle B soit  $= \alpha$ . Soit la longueur du plan AB  $= m$  parties milliemes du pied de Rhin : & le tems de la descente par ce plan  $= n$  minutes secondes : & nous aurons cette équation :

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

ou  $15625 nn (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = m$ , d'où nous tirerons la valeur de la lettre  $\mu$  :

$$\mu = \tan \alpha - \frac{m}{15625 nn \cos \alpha}$$

Donc moyennant une seule experience on fera en état de determiner la raison du frottement à la pression, qui a été supposée comme  $\mu$  à 1 pour le cas du mouvement du corps P.

XVIII. De cette formule il est d'abord clair, que si l'angle  $\alpha$  est égal à celui - cy, où le corps P demeure encore en repos, alors la valeur du frottement sera précisément la même, qu'on aura trouvée pour le repos. Car puisque le corps dans ce cas ne reçoit aucun mouvement, il pourra être regardé, comme s'il falloit un tems infini, pour achever sa descente. Dans ce cas donc le tems  $n$  deviendra infini, & la formule donnera  $\mu = \tan \alpha$ , ou bien le frottement sera à la pression comme la tangente de l'angle B au sinus total, tout comme nous avons trouvé. Mais dès qu'on elevera le plan BA un peu davantage, le corps descendra actuellement, & si l'on observe le tems, qu'il emploie pour parcourir l'espace AB, notre formule fera voir la valeur de  $\mu$ , qui conviendra au mouvement, & qui sera, à ce qu'il paroît vraisemblable, plus petite que dans le cas précédent du repos. On s'assurera encore mieux sur cette matiere, si on donne au plan AB successivement plusieurs diverses inclinaisons, pour voir si chacune donnera la même valeur pour  $\mu$  : car en cas qu'on en obtiendrait des valeurs différentes, on en devroit conclure, que le frottement ne seroit

roit pas le même pour tous les degrés de vitesse, ce qui ne paroît pas pourtant probable.

XIX. En cas que la force du frottement fut plus petite dans le mouvement, que dans le repos, il en résulteroit un phénomène bien étrange, qui mériteroit toute l'attention possible. Pour l'exposer distinctement, soit  $\alpha$  l'angle B du plan incliné, où le poids P se soutient encore à peine en repos : de sorte que pour peu qu'on augmente cet angle, le poids descendroit actuellement sur ce plan incliné. Donc

pour l'état du repos la valeur du frottement sera  $\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  : or sup-

posant, que dès que le corps se meut actuellement, le frottement devint plus petit, soit pour l'état du mouvement la valeur du frottement  $\mu = v \sin \alpha : \cos \alpha$ , où  $v$  marque une fraction plus petite que l'unité. A présent qu'on augmente l'angle B, afin que ce cas du mouvement ait lieu, & soit maintenant l'angle B  $= \phi$  : de sorte qu'on n'a qu'à écrire

dans la formule trouvée cy-dessus  $\phi$  pour  $\alpha$  &  $\frac{v \sin \alpha}{\cos \alpha}$  pour  $\mu$ , pour

trouver le tems  $n''$ , dans lequel le corps P descendra par le plan incliné AB, dont la longueur est de  $m$  millièmes parties du pied de Rhin, le

tems sera donc :  $n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \phi - v \sin \alpha \cos \phi : \cos \alpha)}}$ . Sup-

posons à cette heure que l'angle B  $= \phi$  ne surpasse qu'infinitement peu l'angle de repos  $\alpha$ , & on devoit croire suivant la loi de continuité que le mouvement du corps seroit infinitement lent. Mais nous verrons avec surprise, que ce mouvement s'achève subitement dans un tems fini, & même assez court. Car soit  $\phi = \alpha + \omega$ , où  $\omega$  marque une quantité infinitement petite, & il sera  $\sin \phi = \sin \alpha + \omega \cos \alpha$ , &  $\cos \phi = \cos \alpha - \omega \sin \alpha$ . Ces valeurs étant substituées, on aura

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \alpha + \omega \cos \alpha - v \sin \alpha + v \omega \sin \alpha \tan \alpha)}} = \frac{1}{125} \sqrt{\frac{m}{(1-v) \sin \alpha}}$$

XX. Pour mieux faire sentir le phénomène, que cette formule renferme, soit la longueur du plan incliné AB exactement  $= 15625$  millièmes parties du pied de Rhin, ou soit AB égale à la hauteur, par



laquelle un corps tombe dans une seconde : & le tems de la descente du corps P par ce plan incliné AB sera de  $n = \frac{1}{\sqrt{(1-v)} \sin \alpha}$  secondes; soit de plus comme Mr. *Bilfinger* a trouvé par ses expériences  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , & ce tems seroit  $n = \frac{2}{\sqrt{(1-v)}}$  : & si le frottement devenoit dans le mouvement deux fois moindre, où qu'il fût  $v = \frac{1}{2}$ , ce tems seroit  $n = 2\sqrt{2}$  ou presque de 3". Il ne seroit pas donc possible de donner à ce plan AB une telle inclinaison, que le tems de la descente surpassât 3". Cartandis que l'angle B est  $= \alpha$ , ou moindre, le corps P ne descend point du tout; & dès qu'on eleve tant soit peu le plan au delà, la descente devient subitement si rapide que le corps n'emploiera qu'à peu près 3 secondes, à parcourir le plan incliné AB de plus de 15 pieds. Or il est clair, si l'on eleve le plan davantage, que le tems de la descente deviendra encore plus petit. L'expérience semble plutôt être favorable à ce paradoxe que contraire; car on remarquera aisément, qu'il n'est pas possible de donner à un plan incliné une telle inclinaison, que la descente se fit aussi lentement, qu'on voudra : car, ou le corps ne descendra point du tout, ou il descendra assez vite. Mais pour mieux réussir dans ces expériences, il faut bien prendre garde, que le plan dont on se sert soit partout également poli, afin que le frottement soit partout le même, car il n'y a aucun doute, que si le frottement étoit plus grand dans un endroit du plan, que dans un autre, on ne sauroit tirer de l'expérience aucune conséquence bien assurée.

